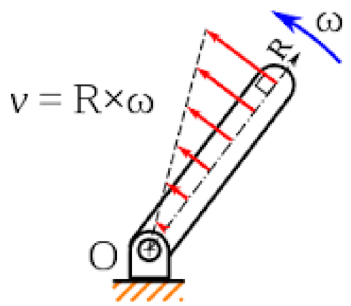
Cours

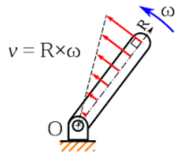
CHAPITRE 4

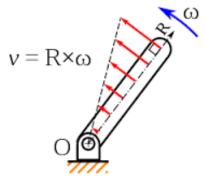
Cinématique



CHAPITRE 4

Cinématique





Chapitre 4

CINEMATIQUE

Introduction

1

1 – PREAMBULE

On constate qu'un corps subsiste dans son état de mouvement si aucune cause extérieure à lui ne vient le perturber. Par cause on entend un effort (ou un système d'efforts). En effet, un solide initialement au repos va y rester, sauf si un effort tend à le faire quitter cet état (et donc prendre de la vitesse par exemple).

☞ *La relation entre « effort » et « mouvement » relève de la dynamique (voir la section « Mécanique du solide »)*

Si on cherche simplement à définir – ou décrire – le **mouvement d'un corps** ou bien la **trajectoire d'un point**, alors on fait ce qu'on appelle de la cinématique.

*En cinématique, on considère les solides comme **indéformables** : leur géométrie est invariante.*

*L'unité légale des distances est le **mètre** (m) et celle des angles le **radian** (rad).*

*Le temps (qui s'écoule) est supposé universel ; l'unité légale du temps est la **seconde** (s).*

2 – DEFINITION (A SAVOIR)

La cinématique est l'étude du mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent.

3 – GRANDEURS UTILISEES

Position, **vitesse** et **accélération** sont les trois grandeurs manipulées en cinématique ; elles sont relatives à un référentiel ; chacune d'elles s'expriment nécessairement dans un référentiel.

☞ *Voir la section « Fondamentaux en physique » pour plus d'information sur les repères et référentiels.*

Les notions de **mouvements** et de **trajectoires**, elles aussi relatives, sont également à considérer quand on fait de la cinématique.

4 – CINEMATIQUE DU POINT – CINEMATIQUE DU SOLIDE – CINEMATIQUE DES FLUIDES

Concernant les points…

Les grandeurs « **position** », « **vitesse linéaire** », « **accélération linéaire** » et la notion de « **trajectoire** » concernent un point (et pas un solide).

⇨ *L'élaboration des relations fondamentales entre ces grandeurs donne lieu à la **cinématique du point**.*

Concernant les solides…

Un solide peut être assimilé à un ensemble de points. Mais deux points d'un même solide peuvent avoir des vitesses et/ou accélérations et/ou des trajectoires différentes.

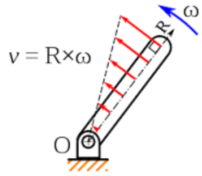
⇨ *L'étude de tout cela donne lieu à la **cinématique du solide**.*

Les grandeurs « **vitesse angulaire** », « **accélération angulaire** » et la notion de « **mouvement** » concernent un solide (et pas un point).

Concernant les fluides…

L'étude des mouvements des milieux fluides constitue la **cinématique des fluides**.

☞ *Nous n'en parlerons que très peu au niveau bac (voir la notion de débit dans la section « Mécanique des fluides ».*



CINEMATIQUE DU POINT

Position et trajectoire

1 – PREAMBULE

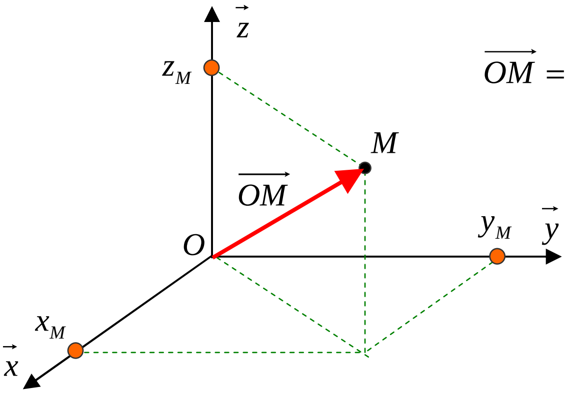
L'objet de la <u>cinématique du point</u> est d'étudier le déplacement d'un point dans l'espace au cours du temps, indépendamment des causes qui le produisent.

*Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que la **position**, la **vitesse** et l'**accélération**. Les notions de **trajectoire** et d'**équation horaire** de la trajectoire seront également vues.*

2 – POSITION D'UN POINT – VECTEUR POSITION

On considère un point M dans l'espace $R\left(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$; les coordonnées cartésiennes du point M sont x_M sur l'axe $\vec{x}$, y_M sur l'axe $\vec{y}$ et z_M sur l'axe $\vec{z}$: $M(x_M\ ;y_M\ ;z_M)$

Le point M peut être repéré à l'aide de son vecteur position $\overrightarrow{OM}$, O étant l'origine du repère : $O(0\ ;0\ ;0)$



$$\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{x} + y_M \cdot \vec{y} + z_M \cdot \vec{z} \iff \overrightarrow{OM}\left|\begin{matrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{matrix}\right|_R$$

Selon la configuration du problème, on utilise un système de coordonnées ou un autre (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphériques) ; on choisit le plus approprié, c'est-à-dire celui présentant les calculs les plus simples.
⇨ Voir la fiche « Repère référentiels » dans la section « Fondamentaux en physique ».

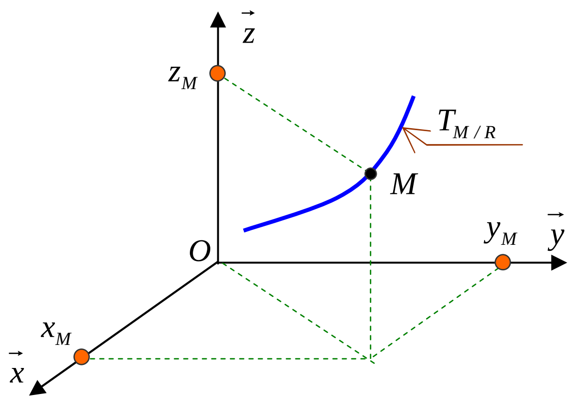
3 – TRAJECTOIRE D'UN POINT DANS UN REPERE

On appelle **trajectoire d'un point M** la **<u>courbe</u>** obtenue en « traçant » les positions successives de ce point M en fonction de l'écoulement du temps t. La courbe peut être :

⇒ plane ou spatiale.

⇒ quelconque ou remarquable (droite, cercle, parabole, sinusoïde, hélice, etc.).

⇒ définie à l'aide d'une équation horaire.

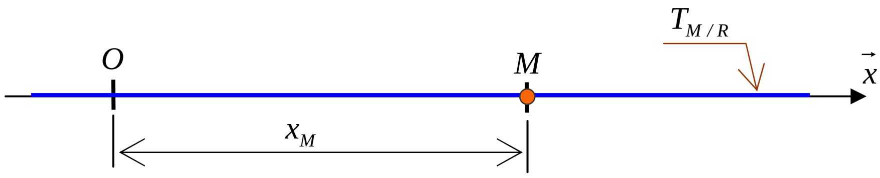


⇨ **La trajectoire du point M dans le repère R s'écrit $T_{M/R}$** *(voir fiche n°8 pour une écriture plus complète).*

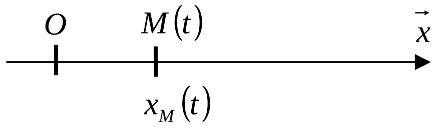
4 – CAS REMARQUABLES

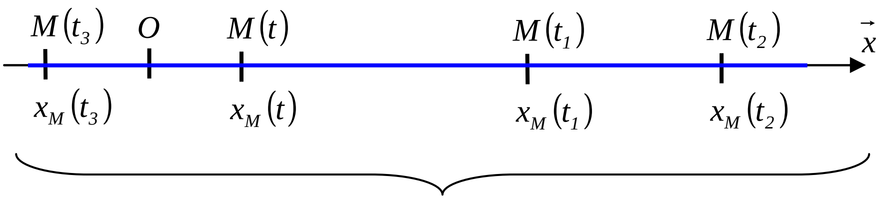
Le point courant M se déplace uniquement sur un axe.

→ **Repérage** : une seule coordonnée cartésienne suffit, x_M sur l'axe $\vec{x}$ par exemple :



Le point courant M peut être écrit $M(t)$ pour évoquer le fait que sa position est variable au cours du temps. Sa coordonnée cartésienne x_M étant de facto variable au cours du temps, on peut aussi la noter $x_M(t)$:





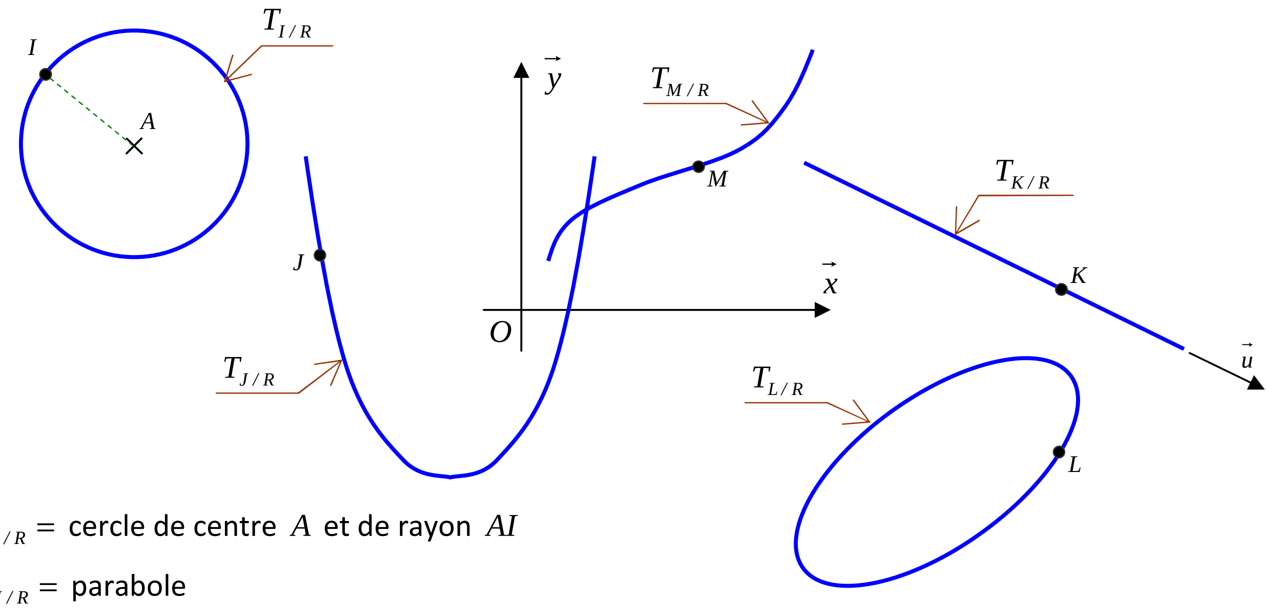
Différentes positions du point M aux dates t, t_1, t_2 et t_3

→ **Trajectoires remarquables** : la droite (c'est le seul cas) : $T_{M/R} = droite\,(O,\vec{x})$.

Le point courant M se déplace dans le plan.

→ **Repérage** : deux coordonnées cartésiennes, x_M et y_M .

→ **Trajectoires remarquables** : droite, cercle, parabole, hyperbole, sinusoïde, etc.



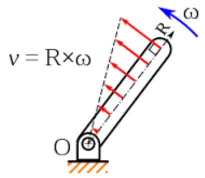
$T_{I/R} =$ cercle de centre A et de rayon AI

$T_{J/R} =$ parabole

$T_{K/R} =$ droite $(K,\vec{u})$

$T_{L/R} =$ ellipse

$T_{M/R} =$ courbe plane (quelconque)



CINEMATIQUE DU POINT

Vitesse et accélération

Chapitre 4

3

1 – DEPLACEMENT ELEMENTAIRE D'UN POINT DANS UN REFERENTIEL

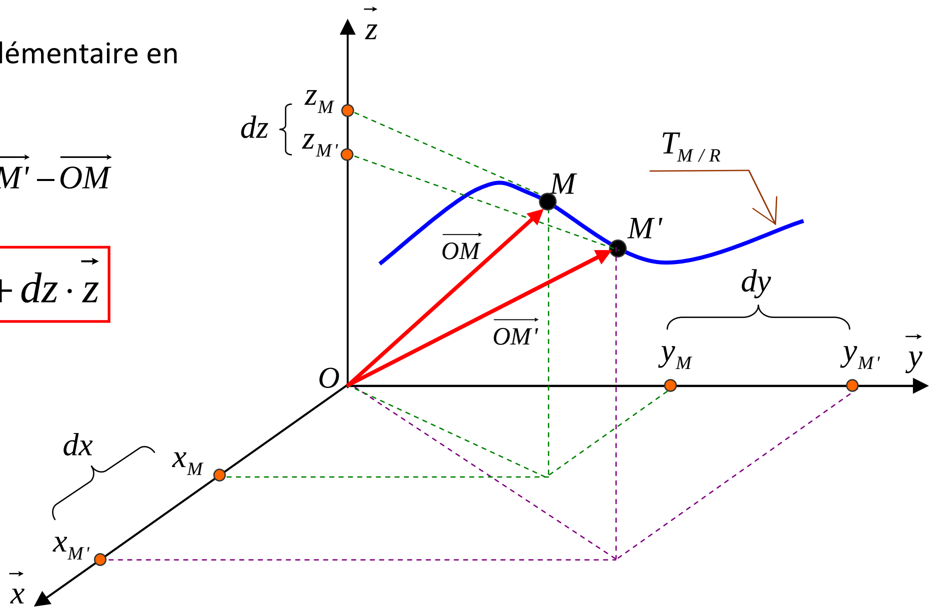
Définition : soit M et M' deux positions occupées successivement par un point M dans un référentiel donné $\Re$. On définit le vecteur **déplacement élémentaire** $d\overrightarrow{OM}$ ou $\overrightarrow{dl}$ par $d\overrightarrow{OM} = \lim\limits_{M' \to M} \overrightarrow{MM'}$.

A comprendre : le point M' est infiniment proche du point M. La variation du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ se note « $d\overrightarrow{OM}$ » et les variations dx, dy et dz sont infiniment petites.

Expression du déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes :

$$d\overrightarrow{OM} = \lim_{M' \to M} \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dx \cdot \vec{x} + dy \cdot \vec{y} + dz \cdot \vec{z}}$$



Unité : mètre (m)

2 – VITESSE INSTANTANEE D'UN POINT DANS UN REFERENTIEL

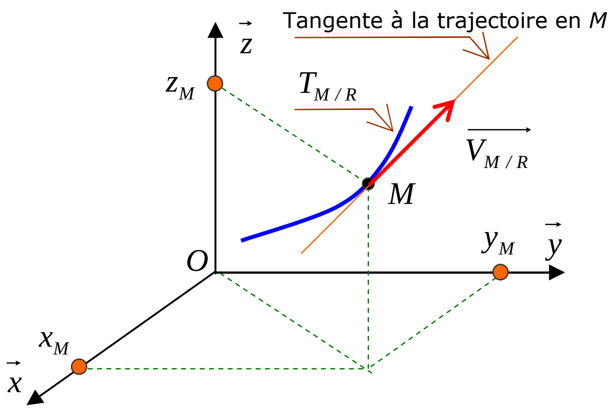
Définition : soit M et M' deux positions occupées successivement par un point M dans un référentiel donné $\Re$, respectivement à l'instant t et $t' > t$.

On note $\overrightarrow{V_{M/R}}$ le vecteur-vitesse instantanée définit par :

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \lim_{t' \to t}\left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t}\right)$$

soit encore :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re}}$$



En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d}{dt}\left(x_M \cdot \vec{x} + y_M \cdot \vec{y} + z_M \cdot \vec{z}\right)\right)_{\Re} = \frac{d}{dt_{/\Re}}\left(x_M \cdot \vec{x}\right) + \frac{d}{dt_{/\Re}}\left(y_M \cdot \vec{y}\right) + \frac{d}{dt_{/\Re}}\left(z_M \cdot \vec{z}\right) = \frac{dx_M}{dt_{/\Re}} \cdot \vec{x} + \frac{dy_M}{dt_{/\Re}} \cdot \vec{y} + \frac{dz_M}{dt_{/\Re}} \cdot \vec{z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M/R}} = v_{x\,M/R} \cdot \vec{x} + v_{y\,M/R} \cdot \vec{y} + v_{z\,M/R} \cdot \vec{z}}$$

* **Unité** : mètre par seconde $\left(m \cdot s^{-1}\right)$; on utilise aussi le kilomètre par heure $\left(km \cdot h^{-1}\right)$.

* **Propriété** : le vecteur-vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

→ Cette propriété est surtout utilisée en cinématique graphique !

3 – ACCELERATION INSTANTANEE D'UN POINT DANS UN REFERENTIEL

De la même façon que la vitesse exprime la variation de position, l'accélération est une grandeur qui exprime la variation de vitesse.

* **Définition** : soit M et M' deux positions occupées successivement par un point M dans un référentiel donné $\Re$, respectivement à l'instant t et $t' > t$.

On note $\overrightarrow{a_{M/R}}$ le vecteur-accélération instantanée définit par :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \lim_{t' \to t}\left(\frac{\overrightarrow{V_{M/R}}(t') - \overrightarrow{V_{M/R}}(t)}{t' - t}\right)$$ soit encore :

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re}}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

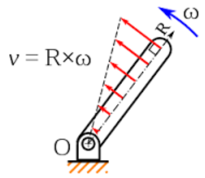
$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\frac{d}{dt}\left(v_{x\,M/R} \cdot \vec{x} + v_{y\,M/R} \cdot \vec{y} + V_{z\,M/R} \cdot \vec{z}\right)\right)_{\Re} = \frac{dv_{x\,M/R}}{dt_{/\Re}} \cdot \vec{x} + \frac{dv_{y\,M/R}}{dt_{/\Re}} \cdot \vec{y} + \frac{dv_{z\,M/R}}{dt_{/\Re}} \cdot \vec{z}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_{M/R}} = a_{x\,M/R} \cdot \vec{x} + a_{y\,M/R} \cdot \vec{y} + a_{z\,M/R} \cdot \vec{z}}$$

* **Unité** : mètre par seconde par seconde $\left(m \cdot s^{-2}\right)$

4 – A RETENIR…

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\boxed{\text{Position } x(t)} \arrow[r, shift left, "{v(t)=\frac{dx(t)}{dt}\ \text{Dérivation}}"] & \boxed{\text{Vitesse } v(t)} \arrow[l, shift left, "{\text{Intégration}\ x(t)=\int v(t)\cdot dt}"] \arrow[r, shift left, "{a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\ \text{Dérivation}}"] & \boxed{\text{Accélération } a(t)} \arrow[l, shift left, "{\text{Intégration}\ v(t)=\int a(t)\cdot dt}"]
\end{tikzcd}$$



CINEMATIQUE DU POINT

Cas particuliers des mouvements rectilignes

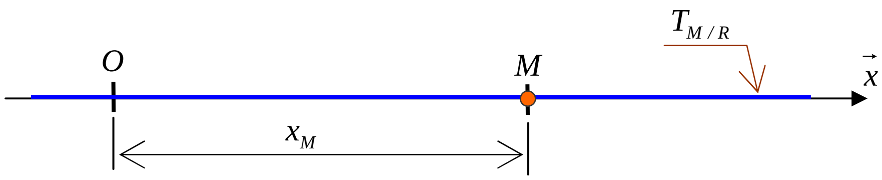
Chapitre 4

4

1 – MISE EN SITUATION

Le mouvement rectiligne est caractérisé par un déplacement du point M en ligne droite.

→ **Repérage** : une seule coordonnée cartésienne suffit, x_M sur l'axe $\vec{x}$ par exemple :



→ **Vecteur-position** : $\overrightarrow{OM} = x_M(t)\cdot\vec{x} = \underbrace{x(t)\cdot\vec{x}}_{\text{Ecriture simplifiée (moins lourde)}}$

→ **Vecteur-vitesse** : $\overrightarrow{V_{M/R}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{dx(t)}{dt}\right)_{\Re}\cdot\vec{x} = v_{x\,M/R}(t)\cdot\vec{x} = \underbrace{v(t)\cdot\vec{x}}_{\text{Ecriture simplifiée}}$

→ **Vecteur-accélération** : $\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt}\right)_{\Re} = \left(\dfrac{dv_{M/R}(t)}{dt}\right)_{\Re}\cdot\vec{x} = a_{x\,M/R}(t)\cdot\vec{x} = \underbrace{a(t)\cdot\vec{x}}_{\text{Ecriture simplifiée}}$

Remarque pratique : *Comme tout se passe sur un seul axe, on peut sans difficulté abandonner l'écriture vectorielle (et sa « lourdeur ») pour se limiter à des écritures algébriques.*

On a donc simplement $a(t)$ pour l'accélération, $v(t)$ pour la vitesse et $x(t)$ pour la position.

On peut même limiter les écritures à a, v et x à condition de bien garder à l'esprit que ces trois grandeurs sont des fonctions du temps : $a = a(t)$, $v = v(t)$ et $x = x(t)$.

Cas particuliers : d'un point de vue cinématique, le mouvement rectiligne donne lieu à deux cas particuliers qu'il faut connaître par cœur (ou être capable de les retrouver, ce qui n'est pas insurmontable en fin de Terminale). On distingue :

⇒ Le **Mouvement Rectiligne Uniforme (MRU)**, caractérisé par une **vitesse linéaire constante** : $v = v_0$.

⇒ Le **Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV)**, appelé aussi Mouvement Rectiligne Uniformément Accéléré (**MRUA**) ; il est caractérisé par une **accélération linéaire constante** : $a = a_0$.

2 – MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME (MRU)

Le point M se déplace sur un axe à vitesse linéaire constante $v(t)=v_0$:

→ **Recherche de l'accélération** $a(t)$:

L'accélération est la dérivée de la vitesse : $a(t)=\left(\dfrac{dv(t)}{dt}\right)_{\Re}=\left(\dfrac{dv_0}{dt}\right)_{\Re}=0$

→ **Recherche de la position** $x(t)$:

La position est la primitive de la vitesse : $x(t)=\int v(t)\cdot dt=\int v_0\cdot dt=v_0\int dt=v_0\cdot t+x_0$

x_0 est une constante d'intégration ; dans les problèmes, elle se détermine par la connaissance d'une position particulière à une date particulière ; il s'agit souvent de la position initiale (à $t=0$), mais ce n'est pas une obligation.

→ **Synthèse à connaître par cœur :**

$$\text{MRU}\quad\begin{cases}a(t)=0\\ v(t)=v_0\\ x(t)=v_0\cdot t+x_0\end{cases}$$

Utile : $\boxed{v_0=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$

3 – MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIE (MRUV OU MRUA)

Le point M se déplace sur un axe avec une accélération linéaire constante $a(t)=a_0$:

→ **Recherche de la vitesse** $v(t)$:

La vitesse est la primitive de l'accélération : $v(t)=\int a(t)\cdot dt=\int a_0\cdot dt=a_0\int dt=a_0\cdot t+v_0$

v_0 est une constante d'intégration ; dans les problèmes, elle se détermine par la connaissance d'une vitesse particulière à une date particulière ; il s'agit souvent de la vitesse initiale (à $t=0$), mais ce n'est pas une obligation.

→ **Recherche de la position** $x(t)$:

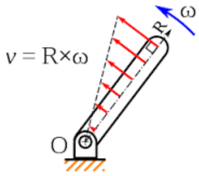
La position est la primitive de la vitesse : $x(t)=\int v(t)\cdot dt=\int (v_0\cdot t+x)\cdot dt=\dfrac{1}{2}a_0\cdot t^2+v_0\cdot t+x_0$

x_0 est une constante d'intégration ; dans les problèmes, elle se détermine par la connaissance d'une position particulière à une date particulière ; il s'agit souvent de la vitesse initiale (à $t=0$), mais ce n'est pas une obligation.

→ **Synthèse à connaître par cœur :**

$$\text{MRUV}\quad\begin{cases}a(t)=a_0\\ v(t)=a_0\cdot t+v_0\\ x(t)=\dfrac{1}{2}a_0\cdot t^2+v_0\cdot t+x_0\end{cases}$$

Utile : $\boxed{a_0=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}}$



CINEMATIQUE DU POINT

Cas particuliers des mouvements circulaires

1 – MISE EN SITUATION

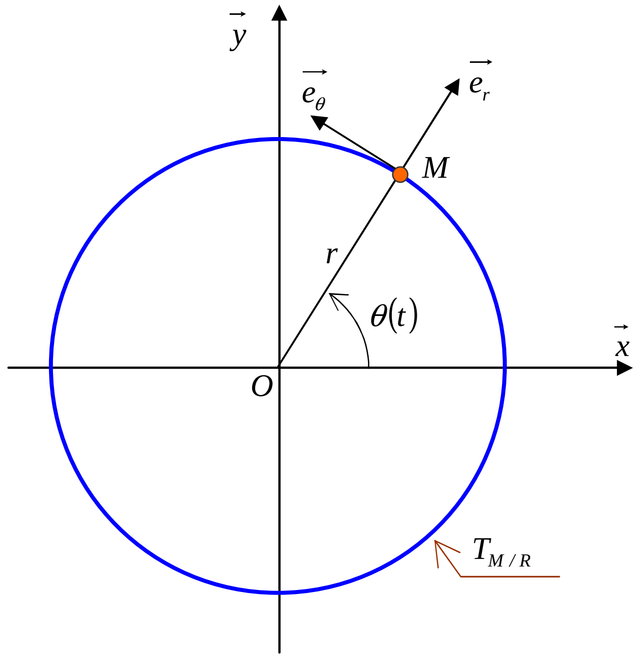
Le mouvement circulaire est caractérisé par un déplacement sur un cercle.

→ **Repérage** :

Compte tenu de la situation, il est ici préférable d'utiliser des coordonnées polaires $M(r,\theta)$:

Pour un mouvement circulaire, le rayon polaire r est constant (il ne varie pas au cours du temps).

Le repère $\Re_1(O,\vec{e_r},\vec{e_\theta})$ tourne à la vitesse $\omega(t)$ par rapport au repère $\Re_0(O,\vec{x},\vec{y})$.



→ **Vecteur-position** : $\overrightarrow{OM} = r\cdot\vec{e_r}$

→ **Vecteur-vitesse** :

$$\overrightarrow{V_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re 0} = \left(\frac{d\left(r\cdot\vec{e_r}\right)}{dt}\right)_{\Re 0} = \left(\frac{d(r)}{dt}\right)_{\Re 0}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\left(\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right)_{\Re 0} = r\cdot\omega(t)\cdot\vec{e_\theta}$$

Conformément aux propriétés du vecteur-vitesse, on voit bien ici qu'il est porté par la tangente à la trajectoire (l'axe $\vec{e_\theta}$).

→ **Vitesse périphérique** :

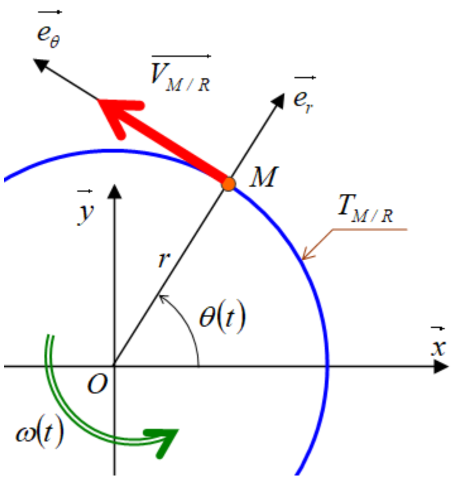
L'intensité du vecteur-vitesse exprimé ci-dessus donne lieu à une **formule très utilisée** et qu'on peut retenir sous la forme suivante :

$$\boxed{V = R\cdot\omega}$$

Vitesse périphérique $(m\cdot s^{-1})$

Rayon de la trajectoire circulaire (m)

Vitesse de rotation en $(rad\cdot s^{-1})$



Les problèmes font souvent apparaître des vitesses de rotation N en $tr\cdot min^{-1}$; on rappelle donc que : $\boxed{\omega = \frac{2\pi\cdot N}{60}}$

→ **Vecteur-accélération** :

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt}\right)_{\Re 0} = \left(\frac{d\left(r\cdot\omega(t)\cdot\overrightarrow{e_\theta}\right)}{dt}\right)_{\Re 0} = r\cdot\omega(t)\cdot\left(\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_{\Re 0} + r\cdot\left(\frac{d\omega(t)}{dt}\right)_{\Re 0}\cdot\overrightarrow{e_\theta} = -r\cdot\omega(t)^2\cdot\overrightarrow{e_r} + r\cdot\alpha(t)\cdot\overrightarrow{e_\theta}$$

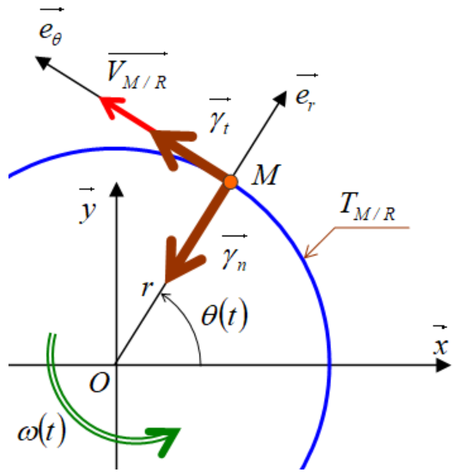
On observe donc la présence de deux composantes pour l'accélération :

⇒ Une composante normale sur l'axe $\overrightarrow{e_r}$: $\boxed{\gamma_n = -r\cdot\omega(t)^2}$

⇒ Une composante tangentielle sur l'axe $\overrightarrow{e_\theta}$: $\boxed{\gamma_t = r\cdot\alpha(t)}$

Si il n'y a pas d'accélération angulaire, $\alpha(t) = 0$ et donc $\gamma_t = 0$.

*La composante normale γ_n s'appelle **accélération centripète**.*



Cas particuliers : d'un point de vue cinématique, le mouvement circulaire donne lieu à deux cas particuliers qu'il faut connaître par cœur (ou être capable de les retrouver, ce qui n'est pas insurmontable en fin de Terminale). On distingue :

⇒ Le Mouvement Circulaire Uniforme (MCU), caractérisé par une **vitesse constante** : $\omega = \omega_0$.

⇒ Le Mouvement Circulaire Uniformément Varié (MCUV), appelé aussi Mouvement circulaire Uniformément Accéléré (MCUA) ; il est caractérisé par une **accélération angulaire constante** : $\alpha = \alpha_0$.

2 – MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME (MCU)

Le point M se déplace sur un cercle avec une vitesse angulaire constante $\omega(t) = \omega_0$:

→ **Synthèse à connaître par cœur** :

Utile : $\boxed{\omega_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$

$$\text{MCU}\ \begin{cases} \alpha(t) = 0 \\ \omega(t) = \omega_0 \\ \theta(t) = \omega_0\cdot t + \theta_0 \end{cases}$$

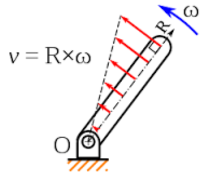
3 – MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORMEMENT VARIE (MCUV OU MCUA)

Le point M se déplace sur un cercle avec une accélération angulaire constante $\alpha(t) = \alpha_0$:

→ **Synthèse à connaître par cœur** :

Utile : $\boxed{\alpha_0 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$

$$\text{MCUV}\ \begin{cases} \alpha(t) = \alpha_0 \\ \omega(t) = \alpha_0\cdot t + \omega_0 \\ \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha_0\cdot t^2 + \omega_0\cdot t + \theta_0 \end{cases}$$



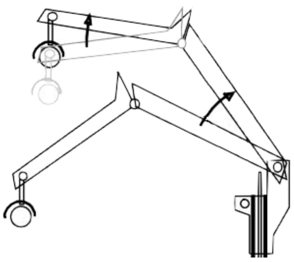
CINEMATIQUE DU SOLIDE

Introduction

Chapitre 4

6

1 – UTILITE DE LA CINEMATIQUE DU SOLIDE

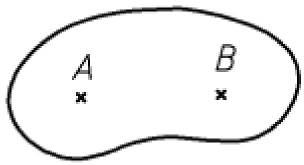


On rappelle que « *la cinématique est la discipline de la mécanique qui s'intéresse au mouvement des corps indépendamment des causes qui les produisent* ».

Les mécanismes se composent de pièces ayant généralement des mouvements les unes par rapport aux autres et, dans le cadre de la résolution de problèmes, il peut être nécessaire de mettre en œuvre les <u>préceptes de la cinématique du point mais appliqués à un solide</u>.

2 – SOLIDE INDEFORMABLE

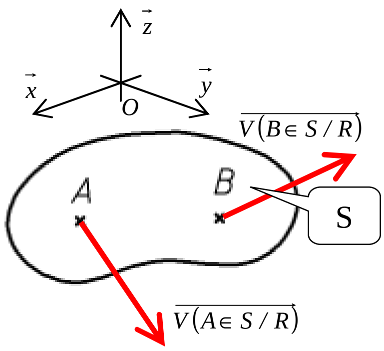
La cinématique du solide considère les **solides indéformables**.



<u>Définition</u> : un solide est indéformable si, à chaque instant, la distance entre deux de ses points reste constante : $\dfrac{dAB}{dt}=0$

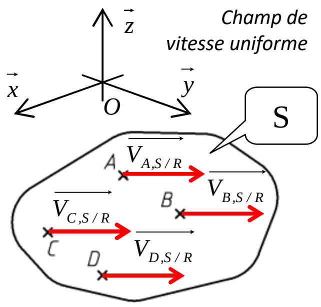
3 – NOTIONS CLES

Position, vitesse et accélération : il va de soit que ces notions vues précédemment sont valables. Par contre, puisqu'un solide possède plusieurs points (une infinité), il est **<u>impératif de préciser le point</u>** pour lequel la position, la vitesse ou l'accélération est donnée ; cette précision modifie légèrement les écritures utilisées en cinématique du point :



<u>Exemple</u> : $\overrightarrow{V(A\in S/R)}$ se lit ***« vitesse du point A appartenant au solide S par rapport au repère R »***.

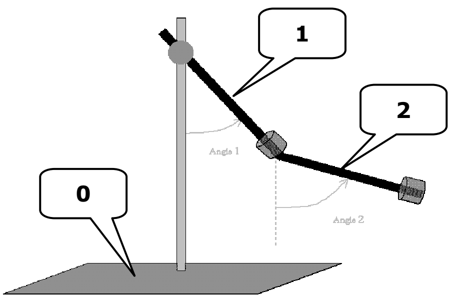
Champ de vitesses : un solide {S} qui se déplace par rapport à un repère $\Re$ possède un mouvement et chaque point i de {S} possède une vitesse par rapport à un repère $\Re$: $\overrightarrow{V(i\in S/R)}$ (vitesse pouvant être nulle ou non nulle). L'ensemble des vecteur-vitesses $\overrightarrow{V(i\in S/R)}$ forme un **<u>champ de vecteurs</u>** appelé ici « **<u>champ des vitesses</u>** ».



Si tous les points du solide ont la même vitesse, le champ des vitesses est uniforme :

$$\overrightarrow{V(A\in S/R)}=\overrightarrow{V(B\in S/R)}=......=\overrightarrow{V(i\in S/R)}$$

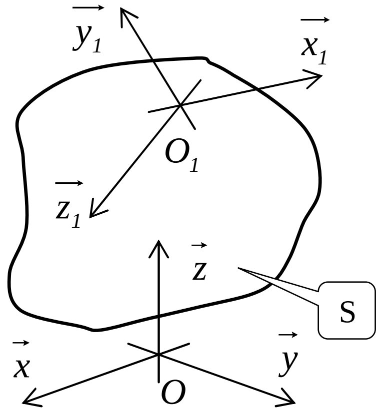
Mouvement : le mouvement d'un solide dépend du repère de référence considéré. Il est dit :



$\Rightarrow$ **absolu** s'il est décrit par rapport à un repère absolu (fixe).

$\Rightarrow$ **relatif** s'il est décrit par rapport à un repère en mouvement.

- $M^{VT}(1/0)$ et $M^{VT}(2/0)$: mouvements absolus
- $M^{VT}(2/1)$ ou $M^{VT}(1/2)$: mouvements relatifs



Mouvement plan : soit $\Re(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère et $\Re_1(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$ un autre repère attaché au solide {S}.

__Définition__ : le solide {S} a un mouvement plan si :

$\Rightarrow$ Toutes ses vitesses sont parallèles au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$,

$\Rightarrow$ Le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega(S/R)}$ est perpendiculaire au plan $(O,\vec{x},\vec{y})$.

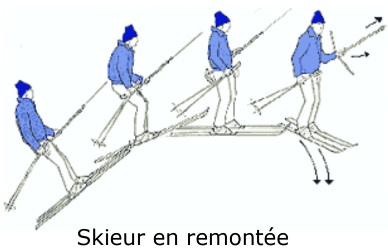
__Autre définition__ (équivalente) :

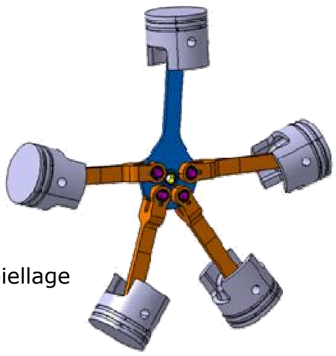
soit M un point appartenant au solide {S} et $\{\vartheta_{S/R}\}$ le torseur cinématique décrivant le mouvement de {S} par rapport à $\Re$.

Si $\{\vartheta_{S/R}\} = {}_M\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega(S/R)} = \omega \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{V(M \in S/R)} = u \cdot \vec{x} + v \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}_{\Re}$ alors le mouvement de {S} par rapport à $\Re$ est plan.

__Exemples de mouvements plans__ :


Fer à repasser sur sa planche

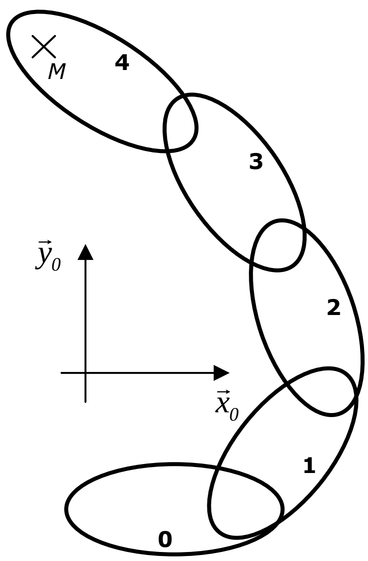

Skieur en remontée


Embiellage


Auto-tamponneuse

__Utilité__ : les problèmes plans peuvent être traités __graphiquement__ → voir fiches n° 8 à 10.

Lois de composition :



Soit une chaîne cinématique comme ci-contre composés de solides en liaisons. Soit M un point appartenant au solide (4).

Dans le cadre d'une étude, on peut avoir besoin de connaître la position, la vitesse et l'accélération de M dans le repère fixe $\Re_0$ attaché au solide (0).

Ceci implique la mise en œuvre des lois de compositions portant sur les *positions*, *vitesses* ou *accélérations* selon le besoin → voir fiche n° 8.

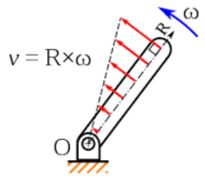
Point coïncident :

Cette notion est __délicate__ à comprendre mais __essentielle__ → voir fiche n° 8.

4 – CINEMATIQUE GRAPHIQUE

Résoudre un problème de cinématique peut se faire par le calcul mais aussi à l'aide de techniques graphiques à condition que le problème soit plan.

Les deux principales méthodes que nous mettrons en œuvre sont celle de **l'équiprojectivité** → voir fiche n° 9 et celle du **Centre Instantané de Rotation**, le « CIR » → voir fiche n° 10.



CINEMATIQUE DU SOLIDE

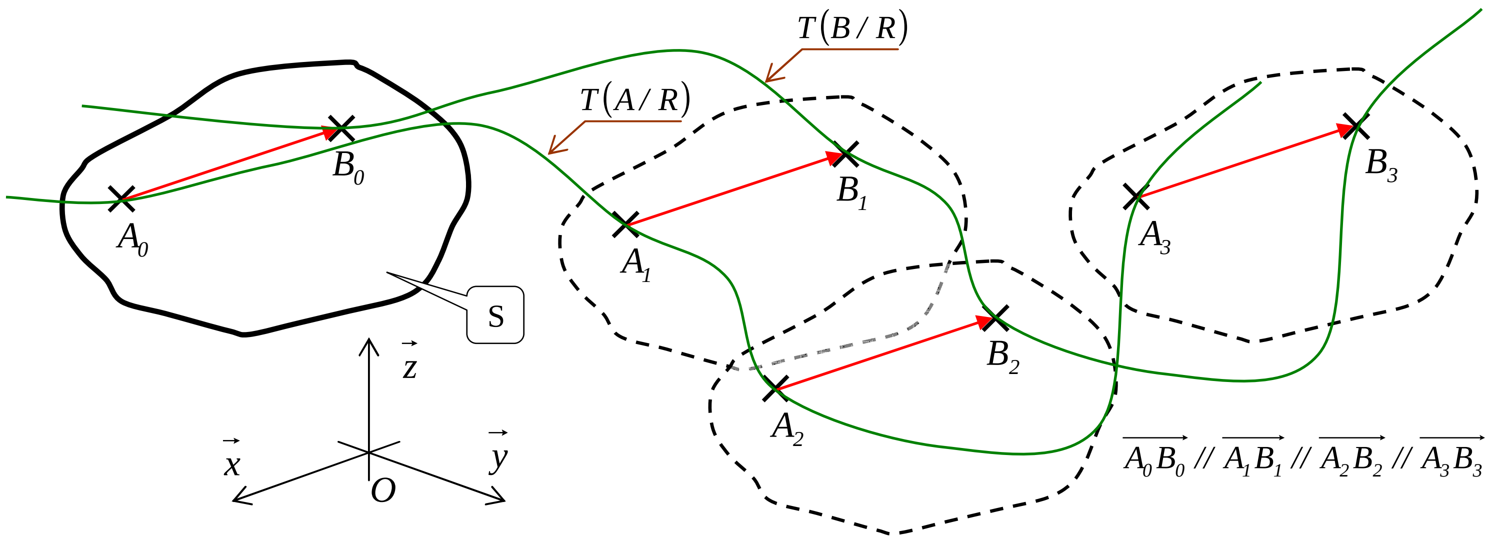
Mouvements de translation et de rotation

Chapitre 4

7

1 – MOUVEMENT DE TRANSLATION

Définition : Le mouvement du solide {S} par rapport à $\Re(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est une translation si pour tout couple de points $(A,B)\in\{S\}$, donc tout couple (A_I,B_I), le vecteur $\overrightarrow{A_IB_I}$ demeure constant, c'est-à-dire se déplace en restant équipollent à lui-même pour un observateur placé dans $\Re(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.



Propriétés :

⇒ Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.

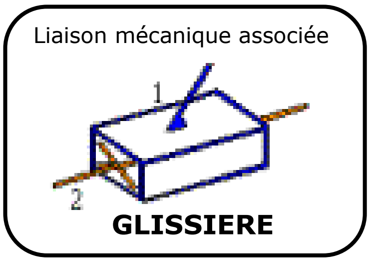
⇒ Tous les points du solide ont même vitesse (le champ des vitesses est uniforme).

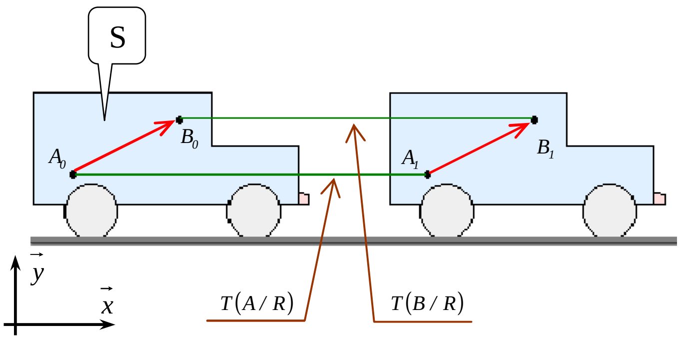
⇒ Tous les points du solide ont même accélération (le champ des accélérations est uniforme).

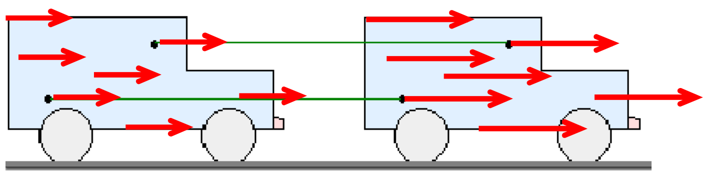
Cas remarquables : (à connaître)

Translation rectiligne : *les trajectoires des points sont des* ***droites parallèles***

$$\left.\begin{array}{l} T(A/R)=droite\,(A,\vec{x}) \\ T(B/R)=droite\,(B,\vec{x}) \end{array}\right\} M^{VT}(S/R)=translation\ rectiligne\ \ d'axe\ \vec{x}$$



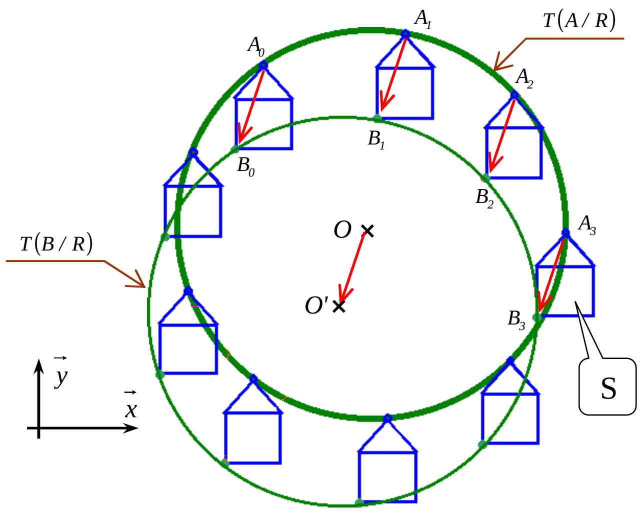


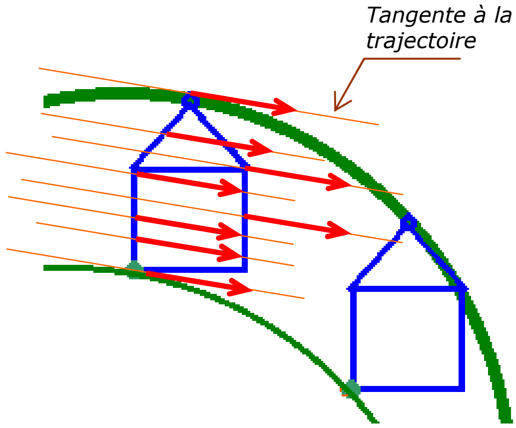


Le champ des vitesses est uniforme

Translation circulaire : *les trajectoires des points sont des* ***cercles***

$$\left.\begin{array}{l} T(A/R)=cercle\,(O,OA) \\ T(B/R)=cercle\,(O',O'B) \end{array}\right\} M^{VT}(S/R)=translation\ circulaire$$

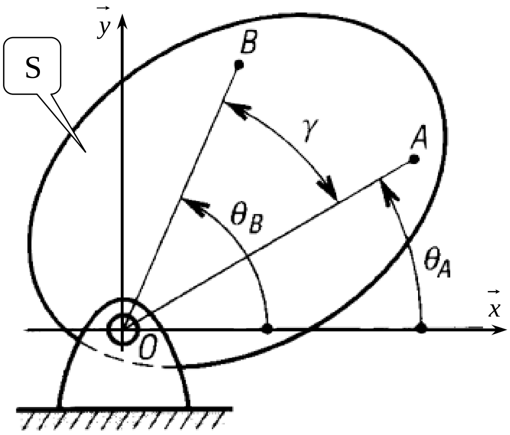




Le champ des vitesses est <u>uniforme</u>

2 – MOUVEMENT DE ROTATION

<u>Définition</u> : Le mouvement du solide {S} par rapport à $\Re(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est une rotation si pour tout point $(P)\in\{S\}$, donc pour tout point $(P_i)\in\{S\}$, sa trajectoire est un cercle de centre O (fixe dans $\Re$) et de rayon OP_i.



$M^{VT}(S/R)=rotation\ \ d'axe\ (O,\vec{z})$

<u>Propriétés</u> :

⇒ Toutes les trajectoires forment des cercles de centre O (ils sont donc concentriques).

⇒ Le solide {S} étant indéformable, on a $\theta_B=\theta_A+\gamma$.

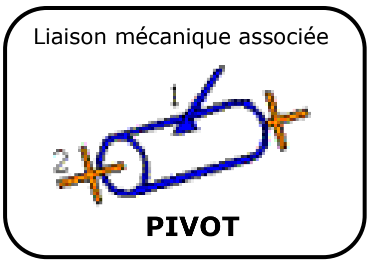
⇒ La vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega(S/R)}$ est celle du solide {S} par rapport au repère $\Re(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$; elle est donc <u>commune à tous les points du solide</u>.

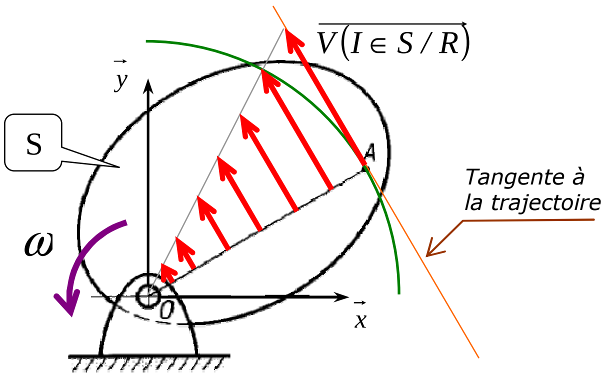
⇒ Le champ des vitesses est proportionnel au rayon : pour tout point $(A_i)\in\{S\}$ situé au rayon $r=OA$, on a

$$\boxed{V(A\in S/R)=r\times\omega}$$

⇒ Vectoriellement, on a :

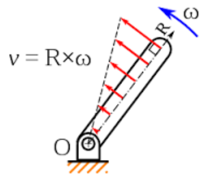
$$\boxed{\overrightarrow{V(A\in S/R)}=\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{\Omega(S/R)}}$$





Le champ des vitesses est <u>proportionnel</u> au rayon

$$\overrightarrow{\Omega(S/R)}=\omega\cdot\vec{z}$$



CINEMATIQUE DU SOLIDE

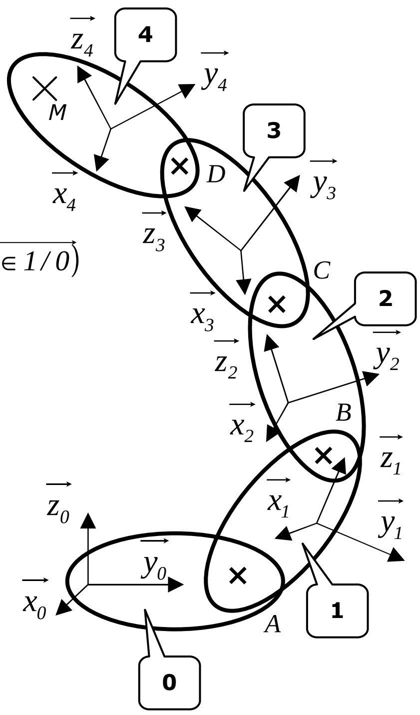
Lois de compositions – Point coïncident

Chapitre 4

8

1 – LOIS DE COMPOSITION

Considérons la chaîne cinématique ci-contre avec des liaisons mécaniques $L_{A0/1}$, $L_{B1/2}$, $L_{C2/3}$ et $L_{D3/4}$ entre les solides (0), (1), (3) et (4).
Soit $\Re_0$, $\Re_1$, $\Re_2$, $\Re_3$ et $\Re_4$ les repères attachés aux solides.
Soit M un point appartenant au solide (4).



- **Loi de composition de positions** : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DM}$
- **Loi de composition de vitesses linéaires** : $\overrightarrow{V(M \in 4/0)} = \overrightarrow{V(M \in 4/3)} + ... + \overrightarrow{V(M \in 1/0)}$
- **Loi de composition de vitesses angulaires** : $\overrightarrow{\Omega(4/0)} = \overrightarrow{\Omega(4/3)} + ... + \overrightarrow{\Omega(1/0)}$
- **Loi de composition des accélérations** : *non abordé*

2 – POINT COÏNCIDENT

Concept : le point M appartenant au solide (4) dispose a priori d'une vitesse par rapport au $\Re_0$ attaché au solide (0), $\overrightarrow{V(M \in 4/0)}$ qu'on cherche à définir.

Soucis : (4) n'est pas en liaison avec (0) ; en l'état, il n'est pas possible d'exprimer directement $\overrightarrow{V(M \in 4/0)}$.

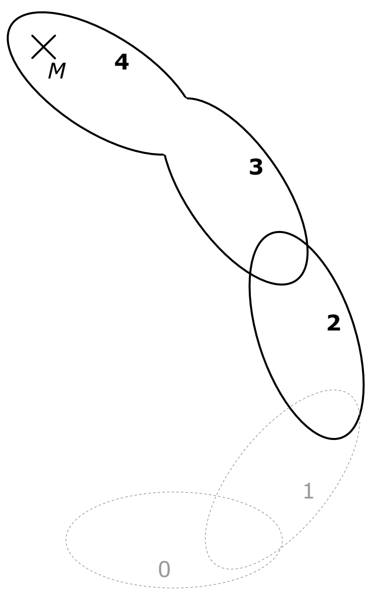
Solution : Passer par la chaîne cinématique via la **composition de vitesses** :

$$\overrightarrow{V(M \in 4/0)} = \overrightarrow{V(M \in 4/3)} + \overrightarrow{V(M \in 3/2)} + \overrightarrow{V(M \in 2/1)} + \overrightarrow{V(M \in 1/0)}$$

Dans cette formule, on voit que le point *M* est considéré comme appartenant successivement au solide (4), puis au solide (3), etc… C'est ce qu'on appelle un ***point coïncident*** :

A une date donnée, on peut considérer que le point M appartient à (4), à (3), à (2), etc… même si, physiquement, il semble « attaché » à (4).

Technique : Cette notion de point coïncident est utile pour déterminer par exemple la vitesse $\overrightarrow{V(M \in 3/2)}$; pour y parvenir, il faut tenir le raisonnement suivant :

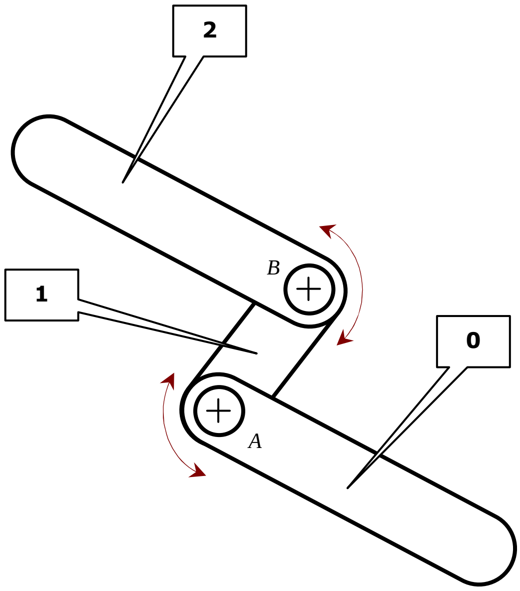


⇨ On « fusionne » les solides (3) et (4) en bloquant leurs mouvements relatifs ; ainsi, (3) et (4) forment une seule et même classe d'équivalence, sans mouvement relatif et le point M, bien qu'appartenant à (4), appartiendra également à (3).

⇨ Ensuite, on s'appuie sur la connaissance du mouvement du solide (3) par rapport au solide (2) (une rotation par exemple si il y a une liaison pivot entre (3) et (2)) pour trouver tout ou partie de la vitesse $\overrightarrow{V(M \in 3/2)}$.

D'un point de vue pratique, tout cela peut être fait complètement par le calcul mais, en ce qui nous concerne, nous nous limiterons volontairement à des approches graphiques.

Conséquence pour les centres des liaisons : prenons le cas d'une liaison pivot entre les solides (1) et (2). Comme le point *B* est le centre de la liaison, il appartient tout le temps à la fois au solide (1) et au solide (2), qu'elle que soit la position relative de ces solides :



$$\forall t \; B \in 2 = B \in 1 = B \,.$$

Ainsi, l'unicité du point *B*, centre de liaison, permet d'écrire que :

$$\overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \vec{0}$$

Par <u>composition des vitesses</u> en *B*, on a alors :

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{V(B \in 2/0)} &= \overrightarrow{V(B \in 2/1)} + \overrightarrow{V(B \in 1/0)} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{V(B \in 1/0)} \\ \overrightarrow{V(B \in 2/0)} &= \overrightarrow{V(B \in 1/0)} \end{aligned}\right\}$$

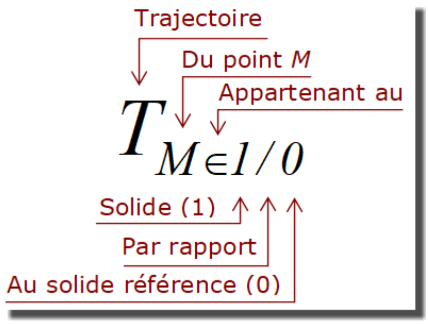
Très pratique dans les problèmes pour <u>justifier</u> certaines écritures…

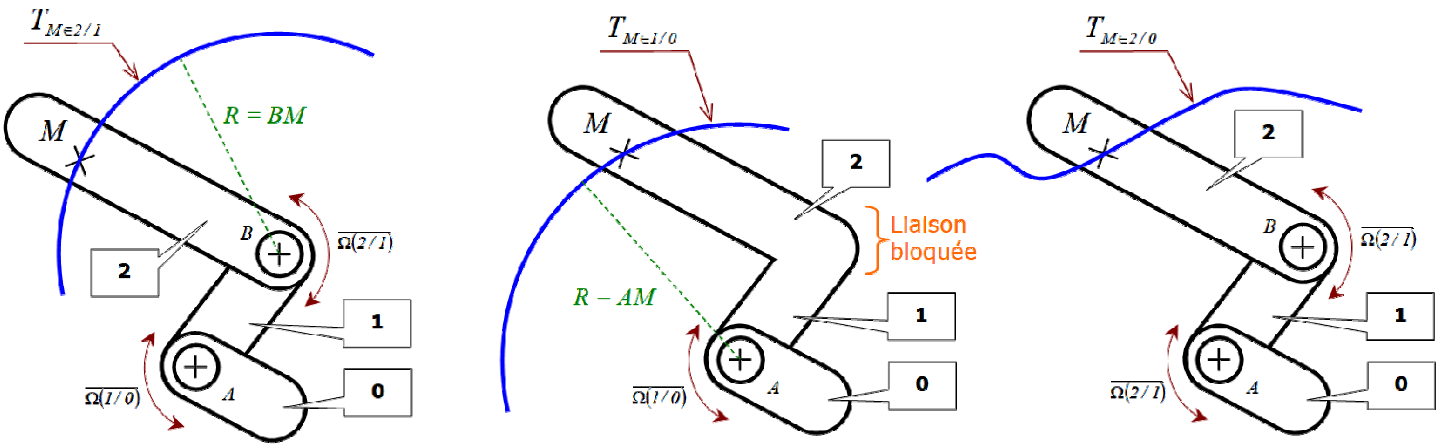
On constate donc que, pour le <u>centre de la liaison</u>, les vitesses sont égales.

Et puisque le point *A* est le centre de la liaison pivot entre (1) et (0), on peut écrire :

$$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \vec{0}$$

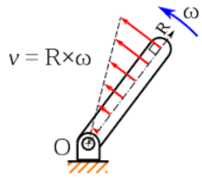
Conséquence pour les trajectoires : en mécanique du solide, un point appartient à un solide ou à un autre (via la coïncidence) ; ce faisant, **décrire la trajectoire d'un point implique qu'on précise le solide d'appartenance** :





$T_{M \in 2/1}$ = *cercle de centre B, rayon BM* $T_{M \in 1/0}$ = *cercle de centre A, rayon AM* $T_{M \in 2/0} = \underbrace{T_{M \in 2/1} + T_{M \in 1/0}}_{\text{Composition de mouvement}}$

Utilité : voir exercices et applications.



CINEMATIQUE DU SOLIDE

Equiprojectivité du champ des vitesses

Chapitre 4

9

1 – UTILITE

La **méthode graphique** d'équiprojectivité permet de **trouver le sens et l'intensité de la vitesse d'un point d'un solide** quand on connaît :

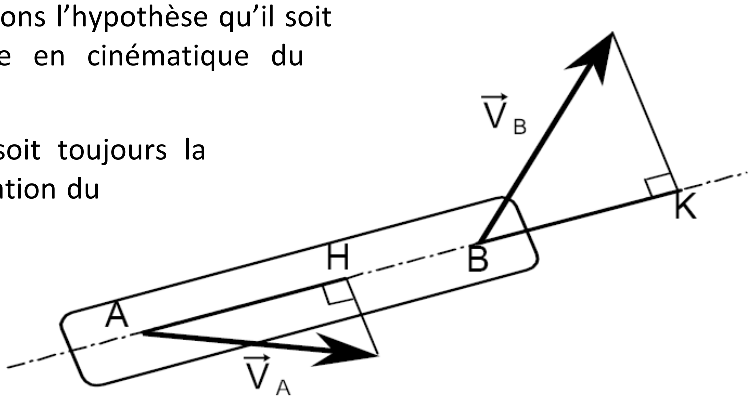
- La direction de la vitesse recherchée,
- Complètement une autre vitesse (en direction, sens et intensité)

Cette propriété est l'une des plus importantes de la cinématique du solide.

Même si l'usage que nous en ferons se limitera à des problèmes plans 2D, la propriété d'équiprojectivité est également vérifiée pour des mouvements quelconques dans l'espace 3D.

2 – DEMONSTRATION

Considérons deux point A et B d'un solide et faisons l'hypothèse qu'il soit indéformable (hypothèse systématiquement faite en cinématique du solide)



L'indéformabilité implique que la distance AB soit toujours la même, à chaque instant et quelle que soit l'orientation du solide ; on peut donc écrire :

$$\forall t \ \overline{AB} = C^{ste}$$

Voyons maintenant une conséquence sur les vitesses des points A et B, vitesses que nous notons $\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_B}$.

Sur la droite (AB), $\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_B}$ se projettent respectivement en $[AH]$ et $[BK]$.

⇨ $[AH]$ est donc la projection de $\overrightarrow{V_A}$ sur (AB)

⇨ $[BK]$ est donc la projection de $\overrightarrow{V_B}$ sur (AB)

Comme $\forall t \ AB = C^{ste}$, cela implique que $\forall t \ [AH] = [BK]$ (sinon, le point B s'éloignerait ou se rapprocherait du point A par déplacement sur la droite (AB), ce qui est impossible puisque, par définition, le solide est indéformable)

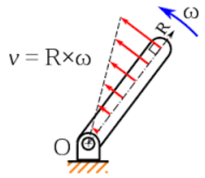
Par ailleurs, $[AH]$ étant la projection de $\overrightarrow{V_A}$ sur (AB) et $[BK]$ celle de $\overrightarrow{V_B}$, on peut écrire ce qui suit :

$$[AH] = \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad [BK] = \overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{AB}$$

(voir section « Mathématiques », *produit scalaire*)

et, consécutivement :

$$\boxed{\overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{AB}}$$



CINEMATIQUE DU SOLIDE

Centre Instantané de Rotation (CIR)

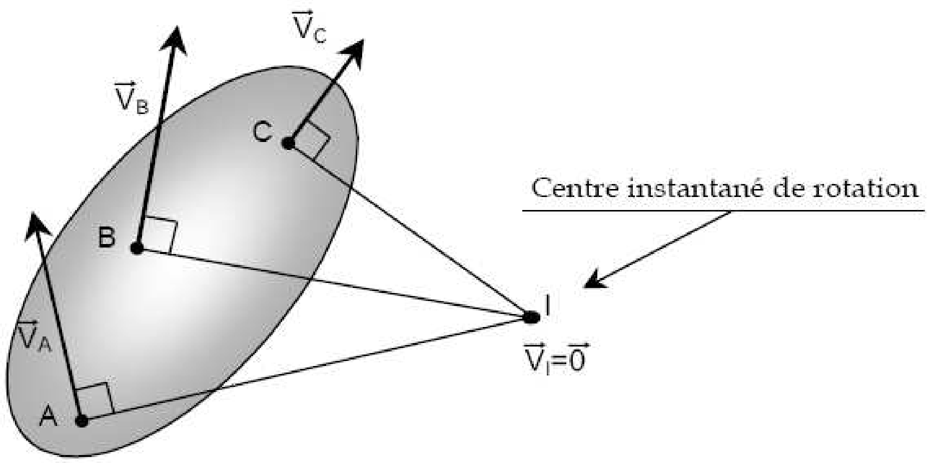
1 – UTILITE

La **méthode graphique** dite du CIR permet de **trouver la direction de la vitesse d'un point d'un solide** quand on en connaît déjà deux autres.

<u>Note</u> : *le CIR ne donne accès qu'à la <u>direction</u> d'un vecteur vitesse ; si on souhaite en connaître le sens et l'intensité, alors il faut utiliser en plus une autre méthode (celle de l'équiprojectivité par exemple).*

2 – PRINCIPE

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un unique point *I* ayant une vitesse nulle à l'instant *t* considéré et appelé centre instantané de rotation ou « CIR ».



En tant que centre de rotation, le CIR est situé à **l'intersection des <u>perpendiculaires</u> aux vecteurs-vitesses** du solide (ceci est du au fait que les vitesses sont tangentes aux trajectoires).

*Bien remarquer bien que la méthode du CIR porte sur **<u>trois points d'un même solide</u>** et que les vitesses de ces points sont toutes **<u>exprimées par rapport au même référentiel</u>**.*

<u>Note</u> : *Le CIR est un point qui, en général, n'est pas fixe par rapport au repère dans lequel sont exprimés les vecteurs vitesse. Dans le cas particulier où il est effectivement fixe, alors il s'agit tout simplement d'un mouvement de rotation : le CIR est un … CR ! Dans le cas contraire, on pose les notions de « <u>base</u> » et de « <u>roulante</u> », mais elles ne seront pas développées.*